

文章编号:1002-980X(2007)02-0046-04

效用函数意义下证券组合投资问题的改进决策树方法

田振明¹, 屠新曙²

(1. 广州中医药大学 经济与管理学院, 广州 510006; 2. 华南师范大学 经济与管理学院, 广州 510006)

摘要:基于 Markowitz 证券组合投资决策模型,运用效用理论中的均值-方差效用函数与决策理论中的决策树方法,提出了一种证券组合投资问题的改进决策树方法;探讨与分析了改进决策树方法的构造与求解过程。改进决策树方法不但可以对证券组合投资问题的决策方案集进行最优投资策略的选择,而且可以对该决策方案集按照一定的标准进行排序。

关键词:决策树;贝叶斯公式;均值-方差效用函数

中图分类号:F830 **文献标志码:**A

1 引言

在证券组合理论研究和实践中,Markowitz 证券组合均值方差理论^[1-2]既是现代证券组合理论的奠基石,也是整个现代金融经济理论的奠基石。它不但在理论上使金融经济学从此改观,并且还在证券市场上引起一场“华尔街革命”。今天人们在处理证券组合投资的收益-风险分析时,Markowitz 证券组合理论始终是一种基本工具。然而,无论是方差矩阵 V 是非奇异矩阵情形的研究工作^[3-8],还是方差矩阵 V 是奇异矩阵情形的研究工作^[9-11],均将 Markowitz 证券组合投资决策问题转化为一个目标函数是二次凸函数,约束条件是两个仿射等式约束的二次凸规划问题。在一定的条件下,采用 Lagrange 乘子法、变量消去法或积极集法^[12]等各种优化方法可得到该问题的唯一最优解,亦即唯一最优投资决策方案,为理性人在证券市场上的投资决策行为给出最优的证券选择组合。然而,由于证券市场是典型的信息不对称市场,证券收益具有非常强的不确定性,理性经济人无法精确判定各风险证券的未来收益,于是理性人追求自身效用最大化,效用的判定则是理性人的主观决策行为。不同的个体具有不同的效用函数。由于在完全竞争的证券市

场中确定的效用函数和初始禀赋可以把个体的基本特征(风险偏好、理性程度等)完整地进行刻画。这就要求我们不能仅局限于 Markowitz 投资决策的唯一最优决策方案,有必要对次优或替补的投资决策方案进行探讨与分析。

在不确定性的证券市场中,理性经济人的证券选择行为涉及到如何描述证券收益的不确定性和以什么标准决定个体的证券选择行为。金融经济学处理证券不确定性的方法是对不确定的状态赋予一个概率分布,个体追求期望收益最大化。在两期模型中,个体决策与交易在时期 0 进行且此时的状态是确定的,不确定性体现在个体对时期 1 的不了解。假设存在描述时期 1 的未定状态集合 Ω , n 种证券收益 $R = R(\omega) = (r_1(\omega), r_2(\omega), \dots, r_n(\omega))$ 是定义在 Ω 上的随机向量,当 $\omega \in \Omega$ 确定后, R 取确定的值。在个体观测到与自然状态相关的私人信息 y 后,他拥有一个关于信息与状态的联合分布的先验概率。个体根据观测到的信息利用贝叶斯法 $P(\omega/y) = \frac{P(y|\omega)P(\omega)}{P(y)}$ 则形成自己的后验概率分布 $P(\omega/y)$,当个体拥有一个证券组合 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 时,他就拥有一份定义在 Ω 上的未定财富,该份财富 $W = W(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i r_i(\omega)$ 给他带来的未定效用 $u(W)$ 。于是,不确定性条件下个体的理性投

收稿日期:2006-10-15

基金项目:广东省自然科学基金(5300285);广州中医药大学人文社科类研究项目(sk0626)

作者简介:田振明(1976—),男,山西朔州人,广州中医药大学经济与管理学院讲师,应用数学硕士,研究方向:数理金融;屠新曙(1968—),男,浙江萧山人,华南师范大学经济管理学院教授,管理学博士,研究方向:金融工程。

决策行为是在一定的预算约束条件和私人信息下,求解适当的 x ,使得下列期望效用最大化

$$\max_x E[u(W) | y] = \int u(W(\omega)) d(\omega | y).$$

证券组合投资决策问题中证券收益具有非常强的不确定性,应用传统的决策树方法,能够找到最优的决策方案,然而投资决策问题的方案有多少种,不同投资者的效用值是多少,其它方案相对于最优方案究竟差多少,具体量化程度如何,最差的投资决策方案是哪一种等一系列问题,传统的决策树方法不能解决。以下我们在引入均值-方差效用函数的前提下,构造改进决策树方法的求解方法。提出了一种改进的决策树方法,并用此方法对证券组合投资决策方案进行了选择和排序。

2 改进决策树的构造过程

决策树是以期望值法为基础的,期望值是一种加权平均数。风险型决策不能确定未来发生哪种状态,决策时必须考虑所有可能发生的状态的影响。但是不能将所有状态(发生概率不同)的影响简单视为相同。期望值法通过比较各方案期望值的大小选择最优方案。对可能发生的多层次的连续相关的事件用树的形式表示出来,并利用其进行期望值计算,从而做出决策的方法。

改进决策树决策方案的选择与排序采取动态规划逆序计算方法,从右向左,由路径的终端(即树梢)开始。对每一个机会结点和决策结点,赋予其一个决策表,记为DT,该决策表有两项内容。第一项内容是截止逆序计算到该结点时所有可能的决策方案,第二项内容是第一项的决策方案所对应的期望效用值(效用决策值)。对于决策树最左边的机会结点或决策结点(即树根),所对应的决策表就是最终所有决策方案与其相应期望效用值所构成的决策方案组合。决策树中其它阶段决策表中的决策方案只是最终决策方案的陈述内容中的一个部分,而不是最终决策问题的决策方案。决策树中最右边的叶子结点(即树梢)所对应的决策表只有第二项期望效用值内容,第一项内容为空。

以下我们具体描述改进决策树的逆序求解方法,也就是对于决策树中所有的机会结点和决策结点,采用从树梢开始至树根的逆序方法,使用期望效用值方法将其改进成为叶子结点,并且记录决策表;直至最后只剩下一个叶子结点为止,这时该叶子结点所记录的决策表就形成了所有决策方案按效用值

大小的一个排序,同时也就得到了各决策方案的效用决策值。

机会结点的改进:对于所有概率分枝指向叶子结点的机会结点,首先分别在所有叶子结点的决策方案中各取一个,然后各决策方案与对应于该机会结点的概率分枝进行组合,形成一个新的决策方案,并根据决策方案的条件计算各叶子结点的期望效用值,每个期望效用值对应于一个新的决策方案,这些期望效用值可能不止一个,这取决于该机会结点的概率分枝所连结的叶子结点决策表中的决策方案和效用值。然后把这些期望效用值按大小重新排序,并且调整相应的决策方案,于是就得到了一个新的决策表,最后将这一机会结点用具有该决策表的一个叶子结点代替,这样该机会结点就被改进且成为了一个叶子结点,原决策树就变成了一个新的决策树。

如果机会结点连结的叶子结点的决策表均无第一项内容(决策陈述),那么该机会结点对应的决策表中仍无第一项内容,只有第二项期望效用值。在机会结点改进成为叶子结点之前,如果由其引出的概率分枝没有涉及到决策结点的改进,那么该机会结点改进后形成的新叶子结点的决策表中也无第一项内容。

决策结点的改进:对于所有策略分枝指向叶子结点的决策结点,首先根据期望效用值的大小,将决策表中第一项决策方案的内容与该决策结点引出的策略分枝进行组合,即在原决策方案条件中增加一个条件,使其成为一个新的决策方案,该方案对应的期望效用值与组合前的期望效用值相同,按期望效用值的大小对相应的决策方案进行调整排序,这样就得到了一个新的决策表,然后用具有该决策表的叶子结点取代该决策结点,于是该决策结点就被改进且成为了一个叶子结点,也就是在改进该决策结点的同时,将该决策结点决策表中的两项内容记录到了相应的叶子结点的决策表中,原决策树就变成了一个新的决策树。任何决策结点的改进都将改变决策表中的第一项内容。

当所有的决策结点都被改进后,就得到了原决策树对应决策问题的所有决策方案及其相应的期望效用值,即最终决策表。其中决策表中排在首位的决策方案就是最优的决策方案,相应的期望效用值就是最大的期望效用值,也就是传统决策方法所求得解。下面我们改进决策树方法对证券组合投资决策问题进行分析。

3 具体实例

我们使用均值 - 方差效用函数 $U(E, \sigma^2)$ 来评价投资者对 Markowitz 证券组合模型产生的预期收益率和风险的偏好效用大小,对于不同的投资者均值 - 方差效用函数 $U(E, \sigma^2)$ 未必相同,但这并不影响改进决策树的求解过程。在证券市场上,证券组合的预期收益率 E 的上升不但会引起风险 R 的增加,而且在证券市场上表现为证券组合指数 S (是组合证券指数的一种加权平均) 的上涨,投资者在证券市场上首先观察到的是证券组合指数 S 是否上升,然后通过观察到的情况,根据自己的均值 - 方差效用函数的期望值大小,选择是否按 Markowitz 证券组合模型所确定的投资比例向量调整自己的证券组合 (称为对证券组合进行操作)。

设证券组合预期收益率上升的先验概率为 70 %,收益率上升时证券组合风险增加的概率为 80 %,反之,证券组合预期收益率不上升时,证券组合风险增加的概率 40 %。证券组合风险增加时,证券组合指数上涨的可能性为 90 %,证券组合风险不

增加时,证券组合指数上涨的可能性是 30 %。用 T 表示对证券组合的调整策略, $T=t$ 和 $T=t'$ 分别表示操作与不操作;用 E 表示证券组合的预期收益率状态, $E=e$ 与 $E=e'$ 分别表示收益率上升和不上升;用 R 表示证券组合的风险状态, $R=r$ 与 $R=r'$ 分别表示风险增加和不增加;用 S 表示证券组合指数状态, $S=s$ 与 $S=s'$ 分别表示证券组合指数上涨和不上涨。投资者的均值 - 方差效用函数如表 1 所示。

表 1 投资者的均值-方差效用函数					
效用值 策略	风险 收益	r		r'	
		e	e'	e	e'
t		100	70	80	30
t'		10	20	30	100

决策树如图 1 所示,机会结点和决策结点下方的 DT_i 表示该结点改进后叶子结点的决策表,DT15 就是投资者证券组合投资的所有决策方案和相应的期望效用值。图中各机会结点引出的概率均为贝叶斯公式处理过的后验概率。

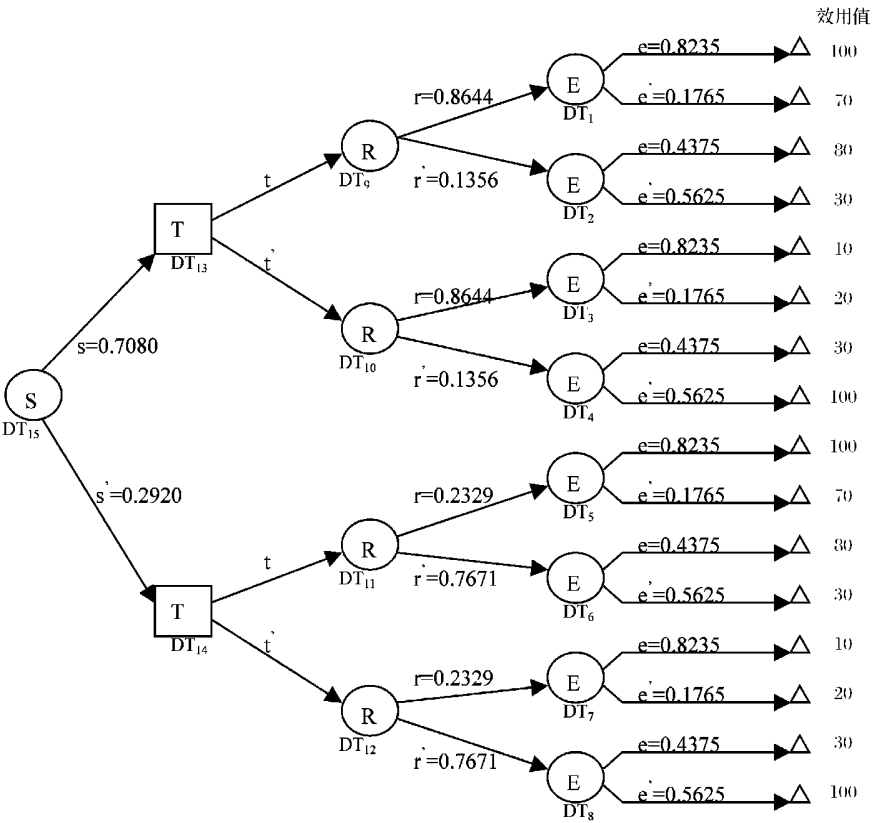


图 1 证券组合投资的决策方案排序

各决策表的具体内容为:DT1 = [- , 94.705], 通过效用值加权所得。DT2 = [, 51.875];DT3 = [- , 11.765];DT4 = [- , 69.375];DT5 = [- ,

94.705]; $DT_6 = [-, 51.875]$; $DT_7 = [-, 11.765]$; $DT_8 = [-, 69.375]$; $DT_9 = [-, 89.087]$; $DT_{10} = [-, 19.600]$; $DT_{11} = [-, 61.850]$; $DT_{12} = [-, 55.958]$; $DT_{13} = [\text{操作 } t, 89.087; \text{不操作 } t', 19.600]$; $DT_{14} = [\text{作 } t, 61.850; \text{不操作 } t', 55.958]$; $DT_{15} = [\text{证指(证券组合指数)上涨 } s \text{ 操作 } t, \text{证指不上涨 } s \text{ 操作 } t, 81.134; \text{证指上涨 } s \text{ 操作 } t, \text{证指不上涨 } s \text{ 不操作 } t', 79.413; \text{证指上涨 } s \text{ 不操作 } t', \text{证指不上涨 } s \text{ 操作 } t, 31.937; \text{证指上涨 } s \text{ 不操作 } t', \text{证指不上涨 } s \text{ 不操作 } t', 30.217}]$ 。其中决策方案陈述“证指上涨 s 操作 t , 证指不上涨 s 操作 t ”是根据机会结点 S 的概率分枝 s 和 s' , 以及决策结点 T 改进后的叶子结点的决策陈述“操作 t , 不操作 t' ”组合而成。 $81.134 = 0.7080$ (证指上涨 s 的可能性) $\times 89.087$ (证指上涨时操作 t 的期望效用值) $+ 0.2090$ (证指不上涨 s 的可能性) $\times 61.850$ (证指不上涨时操作 t 的期望效用值)。其它的决策方案与期望效用值类似可得。

对于 Markowitz 证券组合模型的投资组合, 投资者共有四种决策方案, 各决策方案与相应的期望效用值分别如上所述。最佳的决策方案是: 证指上涨 s 操作 t , 证指不上涨 s 操作 t , 次优的方案是: 证指上涨 s 操作 t , 证指不上涨 s 不操作 t 。这两种决策方案的期望效用值分别为 81.134 和 79.413, 而其它两种决策方案则不可取。

4 结束语

从改进决策方法求解证券组合投资问题的过程可以看出, 传统决策树的求解方法是本文介绍的改进决策树方法的特殊情形。同证券组合投资问题的

传统决策树方法一样, 改进决策树方法在求解证券组合投资问题时也遇到了维数障碍, 即求解所需的计算量随模型中状态结点个数呈指数级数增长。对于含有多重状态结点的证券组合投资问题的改进决策树方法还有待于进一步研究。

参考文献

- [1] Markowitz H. Portfolio Selection [J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77 - 91.
- [2] Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment [M]. Cambridge: Basil Black - Well, 1959, 1991 Second ed.: 320 - 335.
- [3] Ross S A. The Capital Asset Pricing Model, Short Sale Restriction and Related Issue [J]. Journal of Finance, 1977, 32(1): 177 - 183.
- [4] Voros J. The Explicit Derivation of the Portfolio Frontier in the Case of Degeneracy and General Singularity [J]. EJOR, 1987, 36: 302 - 311.
- [5] Dybvig H. Short Sales Restriction and Kinds on the Mean - Variance Frontier [J]. Journal of Finance, 1984, 39(2): 239 - 244.
- [6] 马永开, 唐小我. 不允许卖空的证券组合选择模型研究[J]. 预测, 1999, 18(2): 49 - 52.
- [7] 候为波, 徐成贤. 证券组合 M - V 有效边缘动态分析[J]. 系统工程学报, 2000, 15(1): 26 - 31.
- [8] 屠新曙, 王健. 求解证券组合最优权重的几何方法[J]. 中国管理科学, 2000, 8(3): 20 - 25.
- [9] 史树中, 杨杰. 证券组合选择的有效子集[J]. 应用数学学报, 2002, 25(1): 176 - 186.
- [10] 史树中, 杨杰. 不允许卖空证券组合选择的有效子集[J]. 应用数学学报, 2003, 26(2): 286 - 299.
- [11] 田振明. 奇异方差矩阵的 Markowitz's 证券组合投资决策模型的最优化解法[J]. 数量经济技术经济研究, 2005, 22(10): 135 - 141.
- [12] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

A Method of Improved Decision Tree on the Problem of Portfolio Investment about Utility

TIAN Zhen-ming¹, TU Xin-shu²

(1. School of Economic & Management, Guangzhou University of Traditional Chinese Medicine, Guangzhou 510006, China;

2. School of Economic & Management, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In this paper, based on the model of Markowitz's Portfolio Investment, We proposed the improved decision tree method under the mean - variance utility function and the decision tree method in decision theory. We discussed and analysed the process of improvement and solution. The new method not only discussed how to select the optimal portfolio decision, but also rank the alternatives of the portfolio investment set.

Key words: decision tree; bayesian formula; mean - variance utility function