

# 双因素可转债定价的非参数方法(离散情形) ——基于新的鞅方法

余喜生<sup>1</sup>, 余炳波<sup>2</sup>

(1. 西南财经大学 经济数学学院, 成都 610074; 2. 福建农林大学 交通学院, 福州 350002)

**摘要:**本文基于利率随机过程,通过非参数核估计法,建立了非参数利率期限结构动态模型来研究公司的可转债定价问题;然后,利用公司股票的历史收益率,将 Canonical 方法引入到可转债定价求解过程中,并由最大化熵原理得到其 Canonical 风险中性概率分布;最后,根据等价鞅测度定价原理得出可转债的价格。

**关键词:**随机利率模型;非参数核函数;最大化熵原理;风险中性概率;Canonical 价值

**中图分类号:**F830.91 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-980X(2009)06-0092-04

## 1 可转债定价背景与思路

可转债是一种介于股票和债券之间的金融产品,已成为全球日益流行的金融工具。在我国,可转债也已成为上市公司一种较新的常规再融资方式。对于可转债定价理论,经过三十多年的发展研究,已形成了结构法和简化法两种模型体系。结构法是通过研究公司的资本结构,视公司价值为基本变量来评估可转债的价值。Merton<sup>[1]</sup>最早提出这种方法,他认为公司价值服从一个扩散过程,然后视公司债券为基于公司价值的期权,这样基于公司债券的期权就是基于公司价值的复合期权。不过结构法在实际应用中存在困难,其主要原因是公司价值在市场中不能直接交易和不可观测,这使得对公司价值等参数的估计十分困难,而且得不到一致估计值。简化法模型最先由 McConnell 和 Schwartz<sup>[2]</sup>提出,其特征是可转债的定价以公司股票价格为基本变量。这两种体系按其理论模型所含影响可转债价值因素的数量不同,又分为单因素模型与多因素模型,其中,双因素模型主要考虑利率与公司价值或者利率与标的股票。

然而,目前许多模型方法存在一些自身的弱点。一方面,对于利率因子,事先假定利率遵循某一具体模型,对其概率分布形式进行了假设,但并没有理论根据说明哪一个模型是最好的,模型最终还是要经过数据检验。为避免这一不足, Ait-Sahalia<sup>[3]</sup>、Jiang<sup>[4]</sup>、潘婉彬等<sup>[5]</sup>、宋永安和陆立强<sup>[6]</sup>提出了半参数或非参数利率模型。另一方面,关于股票价格波动率。波动率是现代期权定价模型中的一个重要

参数,然而它又是唯一一个不能直接在资本市场中观察到的参数。为了避免波动率估计问题,Stutzer<sup>[7-9]</sup>提出了所谓 Canonical 期权定价方法。该方法是一种不需要借助波动率以及任何期权数据的非参数方法,它直接通过标的资产的历史收益数据,推导出收益的风险中性概率(Canonical 概率)分布,再用 Canonical 概率计算期权价格,这种方法基于历史实际数据,因此不受各种估计模型的约束。

本文将结合上述非参数定价方法,提出简化法双因素(股价和利率模型)可转债定价方法。本文结构如下:首先,由非参数核估计法建立非参数利率期限结构动态模型;其次,利用公司股票的历史收益率,给出 Canonical 中性概率;最后,根据鞅定价原理计算可转债的价格。

## 2 非参数利率模型

传统的即期利率模型常常对漂移函数和扩散函数进行具体参数形式的假设,经典的有 Vasicek 模型<sup>[10]</sup>和 CIR 模型<sup>[11]</sup>。本文使用宋永安和陆立强<sup>[6]</sup>提出的更一般化的动态模型,即假设即期利率遵循方程(1)所示的一般模型。

$$dr = \mu(r) dt + \sigma(r) d\epsilon_t \quad (1)$$

在方程(1)中,初始值  $r_0 = r_0$ ,  $\epsilon_t$  是一维标准维纳过程,函数  $\mu(r)$  和  $\sigma(r)$  是该过程的瞬时均值和方差,分别称为该扩散过程的漂移函数和扩散函数。假设方程(1)中这一过程是平稳的。

### 2.1 迁移概率密度函数及其估计

方程(1)解的迁移概率密度函数是 Kolmogorov 后向方程与 Kolmogorov 前向方程的唯一解。Kol-

收稿日期:2009-04-17

基金项目:国家自然科学基金项目(70571012);西南财经大学科研基金资助项目(QN0819);西南财经大学创新人才培养基金资助

作者简介:余喜生(1980—),男,江西鄱阳人,西南财经大学经济数学学院讲师,金融工程博士,研究方向:金融衍生品定价;余炳波(1988—),男,江西鄱阳人,福建农林大学交通学院。

Kolmogorov 后向方程与 Kolmogorov 前向方程分别如方程(2)、方程(3)所示。

$$\frac{1}{2} \sigma^2(y) \frac{\partial^2 p(r_t = x / r_t = y)}{\partial y^2} + \mu(y) \frac{\partial p(r_t = x / r_t = y)}{\partial y} = - \frac{\partial p(r_t = x / r_t = y)}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 [ \int_{-\infty}^{+\infty} p(r_t = x / r_t = y) ]}{\partial x^2} = - \frac{\partial p(r_t = x / r_t = y)}{\partial t}.$$

在方程(2)、(3)中, 迁移概率密度  $p(r_t = x / r_t = y)$  表示从时刻  $t$  到时刻  $t$ ,  $r_t$  从  $y$  到  $x$  的概率。由方程(3)可解得概率密度函数, 如式(4)所示。

$$p(r) = \frac{C}{2(r)} \exp \left[ 2 \int_{r_0}^r \frac{\mu(s)}{2(s)} ds \right]. \quad (4)$$

为使迁移概率密度函数估计量有更好的性质<sup>[6]</sup>, 采用如式(5)所示的高斯核来计算密度函数  $p(r)$  的一致核估计量, 得出如式(6)所示。

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (5)$$

$$\hat{p}(r) = \begin{cases} \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \left[ K\left(\frac{r_i - r}{h_n}\right) + K\left(\frac{-r_i - r}{h_n}\right) \right], & r > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (6)$$

在其式(6)中,  $\hat{p}(r)$  为  $p(r)$  的二阶导数,  $\{r_i; i = 1, 2, \dots, n\}$  是在时间  $[0, T]$  期间的  $n$  个等距样本离散观察值, 样本间隔  $\Delta t = T/n$ ,  $T > 0$ ,  $h_n$  是非参数估计量的带宽, 且为 SAS 软件中的最优带宽, 如式(7)所示。

$$h_n = \left( \frac{1}{2 \sqrt{n} \int p(r)^2 dr} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (7)$$

## 2.2 $\mu(r)$ 和 $\sigma(r)$ 的非参数估计

由式(5)、式(6)两式可得  $\mu(r)$  和  $\sigma(r)$  的估计量<sup>[6]</sup>, 分别如式(8)和式(9)所示。

$$\hat{\mu}(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{d \hat{\Lambda}_2(r)}{dr} + \hat{\Lambda}_2(r) \frac{\hat{p}(r)}{p(r)} \right]; \quad (8)$$

$$\hat{\Lambda}_2(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} n K\left(\frac{r_i - r}{h_n}\right)^2}{TK\left(\frac{r_i - r}{h_n}\right)}. \quad (9)$$

由式(8)和式(9), 得到估计的利率模型, 如式(10)所示。

$$dr = \hat{\mu}(r) dt + \hat{\sigma}(r) d\epsilon_t. \quad (10)$$

式(10)是可以证明的<sup>[6]</sup>:

1)  $\hat{\Lambda}_2(r)$  是  $\Lambda_2(r)$  的点态一致估计, 且  $\hat{\Lambda}_2(r)$  的

方差  $Var[\hat{\Lambda}_2(r)] = \frac{\Lambda_4(r)}{n \sum_{i=1}^n \frac{K\left(\frac{r_i - r}{h_n}\right)^2}{h_n}}$ , 其中,  $\hat{\mu}(r)$  的

标准差可用 bootstrapping 法(自助法)求得。

2) 从式(8)和式(9)中估计得到的  $\mu(r)$  和  $\sigma(r)$  使方程(1)的扩散过程中只允许存在非负的利率。

## 3 Canonical 风险中性概率

### 3.1 等价鞅测度

本文假设定标的资产价格不服从任何过程, 而是通过观测到的数据来构建中性概率。因为标的资产价格信息可以通过历史数据来反映, 而不能依靠事先既定的模型。

假设可转债的到期期限为  $T$  (不必以年为单位), 现在时间为 0 时刻; 公司股票现价为  $S_0$ , 股票收益之间是独立的。为了以下说明方便, 不妨将问题离散化, 在离散时点  $t$  红利为  $D(t)$ ;  $r(t)$  表示时点  $t$  到下一刻的利率;  $\pi$  表示股票收益率实际概率,  $\pi^*$  则表示其等价概率测度,  $\frac{d\pi^*}{d\pi}$  为 Radon-Nykodym 导数;  $S(T)$  表示在时点  $T$  的股票价格。则可根据 Stutzer<sup>[7]</sup> 提出的方法, 构建式(10)。

$$S_0 = E \left[ \frac{S(T) + D(T) + \sum_{t=1}^{T-1} [D(t) (1+r(s))]}{\prod_{s=1}^T (1+r(s))} \right] = E \left[ \frac{S(T) + D(T) + \sum_{t=1}^{T-1} [D(t) (1+r(s))]}{\prod_{s=1}^T (1+r(s))} \frac{d\pi^*}{d\pi} \right]. \quad (10)$$

### 3.2 Canonical 中性概率

考虑不带红利情况即  $D(t) = 0 (\forall t)$ , 通过市场观察到的  $n$  个  $T$ -期股票收益率  $R_i = \frac{S_{t+T}}{S_t}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 由式(10)计算可得式(11)。

$$1 = \sum_{i=1}^n \pi^* \left( \frac{R_i}{\prod_{s=1}^T (1+r(s))} \right). \quad (11)$$

根据最大熵原理<sup>[7-9, 12-14]</sup>, 可得到中性概率, 如式(12)所示。在求解中性概率过程中, 要用到“真实概率分布  $\pi_i = \frac{1}{n}$ ”, 这是由于假设“股票收益率  $R_i$  之间是独立的”, 事实上市场中确实没有任何理由说明当  $i \neq j$  时  $\pi_i \neq \pi_j$ 。

$$\pi_i^* = \frac{\exp \left[ \frac{R_i}{\prod_{s=1}^T (1+r(s))} \right]}{\sum_{i=1}^n \exp \left[ \frac{R_i}{\prod_{s=1}^T (1+r(s))} \right]}. \quad (12)$$

在式(12)中,  $\lambda^*$  为 Lagrange 乘子,如式(13)所示。

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \sum_{i=1}^n \exp \left[ \left( \frac{R_i}{\sum_{s=1}^T (1+r(s))} - 1 \right) \lambda \right] \quad (13)$$

式(12)中的  $\lambda^*$  提供了一种概率分布,在此将它称为 Canonical 风险中性概率。

## 4 可转债定价

### 4.1 可转债价值分析

记  $C_T$  表示可转债到期时刻  $T$  的价值; $F$  表示可转债面值,  $P_b = F \cdot e^{-i^T}$  代表票面利率为  $i$  的纯债券价值,  $C_c$  为转换价格。

在债券到期日,如果股价  $S_T$  小于转换价格  $C_c$ ,那么转换后股票价值  $\frac{F}{C_c} S_T$  小于可转换债券当前面值  $F$ ,债券持有人将放弃转换权,发行公司还本付息,可转换债券价值为纯粹债券价值;如果股价  $S_T$  大于转换价格  $C_c$ ,但转换后股票价值  $\frac{F}{C_c} S_T$  小于可转换债券当前纯债券价值  $P_b$ ,那么持有人也会放弃转换权,可转换债券价值仍然为纯债券价值;如果转换后股票价值  $\frac{F}{C_c} S_T$  大于可转换债券当前纯债券价值  $P_b$ ,则持有人将执行转换权,发行公司收回债券,并发放股票,可转换债券价值为转换后股票价值。即到期时该转债的现金流如式(14)所示。

$$C_T = \begin{cases} P_b & S_T < C_c \\ P_b & C_c \leq S_T < \frac{P_b \cdot C_c}{F} \\ \frac{F \cdot S_T}{C_c} & S_T > \frac{P_b \cdot C_c}{F} \end{cases} \quad (14)$$

### 4.2 可转债价格

使用 Canonical 风险中性概率  $\lambda^*$  以及式(14),通过期望算子  $E^*[\cdot]$  计算到期期限为  $T$  的可转债价格,如式(15)所示。

$$C_0 = E^*[C_T] = E^* \left[ \frac{\max(P_b, \frac{F}{C_c} S_T)}{\sum_{s=1}^T (1+r(s))} \right] = \sum_{i=1}^n \lambda^* \left[ \frac{\max[P_b, \frac{F}{C_c} \cdot (R_i \cdot S_0)]}{\sum_{s=1}^T (1+r(s))} \right] \quad (15)$$

由于  $r(s)$  表示在  $[s, s + t]$  区间(在此  $t = 1$  单位时间)的利率,在第 2 节“非参数利率模型”中处理计算利率问题时,可以将估计出来的利率模型(9)做离散处理,离散的单位时间间隔为  $t$ ;或者在模型(9)中,采用模拟技术得到  $r(s)$ 。

## 5 结论与下一步研究

本文所考虑的可转债基于随机利率与公司股票双因素,定价所采用的方法为非参数方法,依靠实际可观测的数据进行分析,而没有采用事先假定的某一模型框架,这样可通过实际数据来反映金融市场的信息。使用的非参数方法主要体现在两个方面:一是随机利率动态模型的非参数估计,事先假设利率不遵循任何具体模型,而是依靠数据进行分析;另外一点体现在,不藉以股票价格运动过程,避免“波动率估计”问题,而是直接通过历史股票价格数据(收益率)得到 Canonical 中性概率测度。结合这两点“非参数”方法,最后对可转债进行了等价鞅测度定价。

下一步研究包括以下三方面的问题:

- 1) 本文只是提出了定价方法,但还未对可转债进行实证检验,这是下一步要研究的主要内容;
- 2) 本文给出的离散形式的可转债定价公式,实际上也可以推广到连续情况,但需要结合 Monte Carlo 模拟进行计算,模拟出股票收益率  $R_i$ ,这也是下一步要研究的内容;
- 3) 为使可转债 Canonical 定价结果更准确,可以采用有约束条件的 Canonical 方法<sup>[7]</sup>进行分析。

### 参考文献

- [1] MERTON R C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1974, 29 (2): 449-470.
- [2] MCCONNELL J J, SCHWARTZ E S, LYON Taming[J]. Journal of Finance, 1986, 41(3): 561-576.
- [3] AIT-SAHALIA Y. Nonparametric pricing of interest rate derivative securities[J]. Econometrica, 1996, 64(3): 527-560.
- [4] JIANG G J. Nonparametric modeling of U. S interest rate term structure dynamics and implications of the prices of derivative securities[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1998, 33(4): 465-497.
- [5] 潘婉彬,陶利斌,缪柏其. 利率期限结构模型非线性建模[J]. 中国管理科学, 2008, 16(5): 17-21.
- [6] 宋永安,陆立强. 非参数利率期限结构动态模型及衍生品定价[J]. 复旦大学学报:自然科学版, 2008, 47(2): 213-219.
- [7] STUTZER M. A simple nonparametric approach to derivative security valuation[J]. Journal of Finance, 1996, 51 (5): 1633-1652.
- [8] STUTZER M. Simple entropic derivation of a generalized black-scholes option pricing model[J]. Entropy, 2000(2): 70-77.
- [9] STUTZER M, CHOWDHURY M. A simple nonparametric approach to bond futures option pricing[J]. Journal

- of Fixed Income ,1999 ,8(4) :67-75.
- [10] VASICEK O. An Equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics ,1977 ,5(2) :177-188.
- [11] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica ,1985 ,53(2) :385-408.
- [12] FOSTER F D, WHITEMAN C H. Bayesian prediction , entropy , and option pricing [J]. Australian Journal of Management ,2006 ,31(2) :181-206.
- [13] GRAY P, EDWARDS S, KALOTA Y E. Canonical valuation and hedging of index options[J]. Journal of Futures Markets ,2007 ,27(8) :771-790.
- [14] GUANGHUI H, JIANPING W. A nonparametric approach for European option valuation [J]. Physica A ,2008 ,387(10) :2306-2316.

## Nonparametric Approach to Two-factor Convertible Bond(Discrete Model) : Based on A New Martingale Approach

Yu Xisheng<sup>1</sup> , Yu Bingbo<sup>2</sup>

(1. Institute of Mathematical Finance ,Southwestern University of Finance & Economics ,Chengdu 610074 ,China ;

2. School of Jiaotong ,Fujian Agriculture and Forestry University ,Fuzhou 350002 ,China)

**Abstract :** To price the corporation convertible bond , a dynamic nonparametric model of interest rate term structure based on radon interest rate model is estimated through kernel function. Also the canonical risk-neutral probability is attained by observed historic stock returns and the maximum entropy principle. Lastly ,the convertible bonds can be valued by using equivalent martingale measure.

**Key words :** random interest rate model ;nonparametric kernel function ;maximum entropy principle ;risk-neutral probability ;Canonical valuation

(上接第 51 页)

公平的作用 ;第三 ,对征收碳税能够降低经济规模的地区 ,可适当减免企业所得税、投资税等其他税 ,以维持政府的财政收入不变。

### 参考文献

- [1] 林毅夫. 防止经济增长趋势过热的政策选择[J]. 中国报道 ,2008(1) :73-75.
- [2] 洪峰,王玫雯. 节能减排只能一路前行[J]. 中国城市经济 ,2008(3) :20-25.
- [3] GOTO N. Macroeconomic and sectoral impacts of carbon taxation[J]. Energy Economics ,1995 ,17(4) :277-292.
- [4] FLOROS N, VLACHOU A. Energy demand and energy-related CO<sub>2</sub> emissions in Greek manufacturing: Assessing the impact of a carbon tax [J]. Energy Economics ,2005 (27) :387-413.
- [5] CREEDY J, SLEEMAN C. Carbon taxation ,prices and welfare in New Zealand [J]. Ecological Economics ,2006 ,57 :333-345.
- [6] LEE C F, LIN S J, LEWIS C. Analysis of the impacts of combining carbon taxation and emission trading on different industry sectors[J]. Energy Policy ,2008 ,36 :722-729.
- [7] 高鹏飞,陈文颖. 碳税与碳排放[J]. 清华大学学报:自然科学版 ,2002 ,42(10) :1335-1338.
- [8] 魏涛远,格罗姆斯洛德. 征收碳税对中国经济与温室气体排放的影响[J]. 世界经济与政治 ,2002(8) :47-49.
- [9] 王淑芳. 碳税对我国的影响及其政策响应[J]. 生态经济 ,2005(10) :66-69.
- [10] 刘强,姜克隽,胡秀莲. 碳税和能源税情景下的中国电力清洁技术选择[J]. 中国电力 ,2006 ,39(9) :19-23.
- [11] 李绍荣,耿莹. 中国的税收结构、经济增长与收入分配 [J]. 经济研究 ,2005(5) :118-126.
- [12] 陈钊,陆铭,金煜. 中国人力资本和教育发展的区域差异:对于面板数据的估算[J]. 世界经济 ,2004(12) :25-32.

## Analysis on Effects of Carbon Taxation on Economic Development , Energy Consumption and Income Distribution

Zhang Mingwen ,Zhang Jinliang ,Tan Zhongfu ,Wang Donghai

(Institute of Electric Power Economics ,North China Electric Power University ,Beijing 102206 ,China)

**Abstract :** This paper constructs the econometric model through using the panel data about during 1995-2005 ,and studies the effects of carbon taxation on economic growth ,energy consumption and income distribution of 28 provinces ,municipalities and autonomous regions in China. The results show that the carbon taxation improves economic scales of most of areas ,and restrains the energy consumption of eastern region ,but expands the income distribution gap between capital owners and labor owners ,which shows that China should impose carbon taxation with different tax rate for different regions to realize energy-saving and emission-reduction under the premise of maintaining economic growth and social equity at present.

**Key words :** economic growth ;energy consumption ;carbon taxation ;income distribution